

MaSciProûve

Vol. 1 Num. 1

La revue de l'association sans but lucratif "cafr-MSA2P"



Siège social :
Rue de la Brasserie 5
7100 La Louvière, Belgique
Numéro d'entreprise : 0777.770.751
Registre des Personnes Morales : Hainaut division Mons
IBAN : BE79 3632 1778 3733

Editeur responsable Roland Coghetto

Janvier - Février - Mars 2022



Les articles de ce périodique ne sont pas des articles scientifiques : ils ne sont pas soumis à un protocole de relecture et de validation avec comité de lecture scientifique. Nous ne publions pas d'articles scientifiques dans ce périodique : le cas échéant, nous vous invitons à contacter directement les revues scientifiques.

De plus, certains ne sont pas à strictement parler des articles de vulgarisation : en effet, ils n'en respectent ni la forme ni le contenu.

Sauf exception, les numéros de version des logiciels et bibliothèques associées à ces logiciels ne sont volontairement pas explicités. Si besoin, nous invitons le lecteur à vérifier au cas par cas l'état actuel des modifications apportées à ces logiciels ou bibliothèques.




Par contre, les articles ont pour objectif de présenter, de susciter votre intérêt, d'alimenter votre curiosité et votre réflexion au sujet de l'utilisation de logiciels *assistant interactif de preuve* ou *assistant automatique de preuve*.

Soyez également libre de nous proposer vos articles non scientifiques. Dans la limite de nos moyens, l'association soutient ses membres pour la préparation d'articles utilisant des assistants de preuves pour des revues scientifiques : aide à l'utilisation des logiciels, compréhension des bibliothèques,...

"Proûve" signifie "preuve" (dialecte wallon de Liège - Dictionnaire liégeois de Jean Haust)

L'image de la première page est distribuée sous licence Creative Commons Attribution 4.0 International

Licence : <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr> (CC BY 4.0) 

Copyright © David Revoy 2021, www.peppercarrot.com

Téléchargement : https://www.peppercarrot.com/fr/viewer/framesoft__2021-10-12_D2_Infrastructure_by-David-Revoy.html

Editeur responsable de la revue "MaSciProûve" : Roland Coghetto

"cafr-MSA2P" ASBL est l'abréviation de "*Centre autonome de formation et de recherche en mathématiques et sciences avec assistants de preuve*" association sans but lucratif (non-profit organisation)

Siège social : Rue de la Brasserie 5, 7100 La Louvière - Belgique

Numéro d'entreprise : 0777.770.751

Registre des Personnes Morales : Hainaut division Mons

IBAN : BE79 3632 1778 3733

L'association ne délivre pas de diplômes. (cf. Art. 3 §3. du *Décret définissant le paysage de l'enseignement supérieur et l'organisation académique des études* : "Les établissements d'enseignement supérieur [...] sont seuls habilités à délivrer les titres, grades académiques, diplômes et certificats correspondant aux niveaux 5 à 8 du cadre francophone des certifications.")

Auteur : Roland Coghetto

Remerciements : Roman Matuszewski (Mizar-MSE in *Elément de logique*)

Relecture des articles : Catherine Marbaix.

Ce périodique ne peut être vendu.

Table des matières

1	Le coin des bibliothèques	2
1.1	Geocoq : Varignon	2
1.2	Mizar Mathematical Library (MML) : Topologie	10
2	Il faut qu'on en parle...	11
3	Le centre de documentation	13
3.1	"La logique pas à pas"	13
3.2	"Éléments de logique"	15

1 Le coin des bibliothèques



Dans cette section, nous choisissons de vous présenter un extrait d'une bibliothèque *open source*. Le choix du système est à notre discrétion mais il est souvent également possible de trouver des développements semblables dans un autre langage ou avec le support d'une autre logique. Nous vous invitons à comparer et à nous transmettre vos observations et commentaires, que nous publierons, le cas échéant, dans un prochain numéro.

1.1 Geocoq : Varignon

Dans ce numéro, nous nous attardons sur la bibliothèque **GeoCoq**¹, consacrée aux géométries neutre, euclidienne et non-euclidienne.

Même si l'entiereté du code **Coq** n'est pas toujours accessible à un étudiant d'un niveau secondaire non accompagné, certains exercices peuvent être abordables. C'est un de ceux-ci qui sera exposé ci-dessous.

Un petit retour en arrière est nécessaire : la plupart des étudiants de la fin de l'enseignement secondaire sont capables de résoudre des exercices de géométrie en utilisant des techniques de géométrie vectorielle ou algébrique. Et c'est tant mieux. Néanmoins la géométrie synthétique est toujours d'actualité dans certains programmes scolaires. Elle n'a plus la place répondérante qu'elle pouvait avoir il y a des nombreuses années, mais elle n'est pas totalement obsolète.

Dans le programme d'études "Mathématiques pour les scientifiques"² (Enseignement secondaire ordinaire : Humanités générales et technologiques 3^e degré), on peut lire, dans le module 5SUA7 "Géométrie synthétique et géométrie analytique de l'espace"³ :

Face à un problème de géométrie, l'élève devrait se poser la question du choix du cadre de travail : géométries vectorielle, analytique ou synthétique. Dans cette UAA, on amènera l'élève à parfaire sa pratique de la démonstration en géométrie. La géométrie synthétique est le prolongement de notions rencontrées au deuxième degré (4UAA2) ; elle fournit les éléments de base pour aborder les volets vectoriel et analytique. Là où la géométrie synthétique est plus difficile à mettre en œuvre, la géométrie analytique se révèle être un outil puissant de démonstration qui permet de résoudre plus simplement certains problèmes. Toutefois, elle peut masquer le côté visuel des objets de l'espace. [...] Pour atteindre les objectifs de l'UAA, l'enseignant entrainera les élèves :

- en géométrie synthétique, à reconstruire une démonstration faite en classe (notamment les démonstrations relatives aux critères d'orthogonalité) ;
- en géométrie synthétique, non seulement, à « aller » vers la thèse par déductions successives à partir des hypothèses en exploitant des propriétés connues, mais aussi à partir de la thèse trouver les conditions suffisantes pour que celle-ci soit validée ; [...]
- à utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour visualiser certaines situations de l'espace, pour vérifier des conjectures émises lors d'une recherche.

Il est clair que l'assistant de preuve n'est pas à l'ordre du jour dans l'enseignement secondaire. Au contraire des logiciels de géométrie dynamique, cette technique n'est pas encore prête à être utilisée

¹<https://geocoq.github.io/GeoCoq/>

²(470/2016/240)

³<https://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/470-2015-240.pdf>

de façon efficace et utile avec la plupart des étudiants.

Les recherches sont en cours. Le but de la revue est aussi d'aborder les avancées et les perspectives dans ce domaine.

Même s'il est toujours difficile de fixer un début à une recherche tant les précurseurs peuvent être nombreux, une proposition de point de départ à quelques lectures peut être [10, 15].

Dans la suite de l'article, c'est la bibliothèque **GeoCoq** qui sera utilisée.



Nous ne nous attardons pas dans ce numéro sur une étude en profondeur des axiomes de base, de la motivation des énoncés, ni de tous les détails de la démonstration. En effet, nous privilégions une approche graduelle : susciter la curiosité et l'intérêt. Le lecteur est invité, s'il le désire, à brûler les étapes et à satisfaire sa propre curiosité. Nous l'encourageons à nous communiquer ses commentaires et son ressenti.

Prenons comme premier exemple le **théorème de Varignon** : *Si $ABCD$ est un quadrilatère quelconque et I, J, K, L les milieux de ses côtés, alors $IJKL$ est un parallélogramme.*⁴

Require Export GeoCoq.Tarski_dev.Annexes.midpoint_theorems.

Section Varignon.

Context '{TE:Tarski_euclidean}.

(** This is the usual proof presented in classroom based on the midpoint theorem but this proof suffers from two problems. It needs the fact that IJK are not collinear, which is not always the case when the quadrilateral is not convex. It also needs the fact that A is different from C , and B is different from D . The original proof by Varignon suffer from the same problem. The original proof can be found page 138, Corollary IV: http://polib.univ-lille3.fr/documents/B590092101_000000011.489_IMT.pdf *)

Lemma varignon :

```
forall A B C D I J K L,
  A<>C → B<>D → ~Col I J K →
  Midpoint I A B →
  Midpoint J B C →
  Midpoint K C D →
  Midpoint L A D →
  Parallelogram I J K L.
```

Listing 1 – **GeoCoq/Highschool/varignon.v** (Extraits : énoncé - Version 2.4.0)

Au premier abord, si on ne connaît pas les assistants de preuve, on pourrait penser qu'il s'agit d'une simple réécriture de l'énoncé du théorème.

Il est à noter que

- L'espace, euclidien bien entendu dans ce cas, n'est pas nécessairement le plan, ou l'espace usuel de dimension 3, il peut être de dimension quelconque (cf. "**Tarski_euclidean**").
- Contrairement à l'énoncé de wikipédia, il n'est pas question de quadrilatère, mais de quatre points dans une configuration particulière, qui peut-être un quadrilatère croisé.
- L'énoncé ci-dessus est écrit dans un langage syntaxique bien défini. Le logiciel **Coq** valide cet énoncé : il est *bien écrit* : il respecte la structure de définitions et la structure syntaxique, . . . Mais l'assistant de preuve va beaucoup plus loin : le théorème, comme nous le verrons ci-dessous, est également accompagné d'une démonstration. Le logiciel *Coq* va également
 - vérifier si la démonstration est *bien écrite* et
 - - c'est l'utilité de l'assistant de preuve - vérifier que la démonstration justifie correctement l'énoncé, c'est-à-dire que celui-ci est bien valide dans le contexte défini préalablement et en utilisant une logique particulière. Souvent cette logique est soit la déduction naturelle ou soit la logique constructiste.

⁴https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Varignon

C'est en cela la plus value particulière de cet énoncé : il a été formellement confirmé par un système logiciel. Cette confirmation n'est pas issue d'un automatisme mais d'un long processus de cheminement qui a abouti à une démonstration simple présentée ci-dessous. Bien entendu, des méthodes vectorielles peuvent aussi prouver cet énoncé, mais la particularité ici est l'existence d'une démonstration synthétique.

Même si la suite des propositions permettant d'aboutir à la preuve de ce théorème de Varignon est longue, elle est acquise et cette suite constitue une base solide pour les futurs développements.

- Comme l'énoncé a été validé (et qu'il existe un modèle prouvant que le système d'axiomes utilisé est cohérent), il pourra être réutilisé pour d'autres démonstrations, sans craindre des erreurs, sauf celle d'une utilisation incorrecte des définitions.
- Autrement dit, si un étudiant s'interroge sur l'énoncé du théorème de Varignon, il peut utiliser celui-ci et relier les définitions nécessaires entre elles. Il s'agit de la force et la robustesse de cette utilisation.

Voici une preuve, en **Coq** du théorème de Varignon :

```

Proof.
intros.
assert_diffs.
assert (Par I L B D) (** Applying the midpoint theorem in the triangle BDA. *)
  by perm_apply (triangle_mid_par B D A L I).
assert (Par J K B D) (** Applying the midpoint theorem in the triangle BDC. *)
  by perm_apply (triangle_mid_par B D C K J).
assert (Par I L J K) (** Transitivity of parallelism *)
  by (apply par_trans with B D;finish).
assert (Par I J A C) (** Applying the midpoint theorem in the triangle ACB. *)
  by perm_apply (triangle_mid_par A C B J I).
assert (Par L K A C) (** Applying the midpoint theorem in the triangle ACD. *)
  by perm_apply (triangle_mid_par A C D K L).
assert (Par I J K L) (** Transitivity of parallelism *)
  by (apply par_trans with A C;finish).
apply par_2_plg;finish. (** If in the opposite side of quadrilateral are
                        parallel and two opposite side are distinct
                        then it is a parallelogram. *)

```

Qed.

Listing 2 – GeoCoq/Highschool/varignon.v (Extrait : Démonstration - Version 2.4.0)

Il n'est pas toujours nécessaire d'installer ou de vérifier une bibliothèque numérique : elle est disponible en ligne, sous la forme d'une liste de toutes les définitions et propositions validées à l'adresse <https://geocoq.github.io/GeoCoq/html>.

Par exemple la version html du théorème de Varignon est visible à l'adresse suivante : <https://geocoq.github.io/GeoCoq/html/GeoCoq.Highschool.varignon.html> Par contre, pour vérifier la démonstration, voici une marche à suivre possible : nous nous proposons d'installer Coq en utilisant la solution `platform`⁵ :

Coq has a rich ecosystem of external packages (libraries and plugins) that extend it and make it more powerful. The Coq platform provides an easy way to install Coq and a consistent set of packages on Windows, macOS and many Linux distributions.

En utilisant `platform`, on obtient un système complet de bibliothèques. La mise en place peut prendre un certain temps et des choix d'option sont nécessaires. La documentation https://github.com/coq/platform/blob/main/doc/README_Linux.md signale que l'installation peut prendre jusqu'à 5 Go de place sur votre disque dur. Toutes ces bibliothèques ne sont pas nécessaires pour GeoCoq et il peut être difficile de comprendre a priori pourquoi cela est utilisé pour une simple bibliothèque de géométrie. Voici une explication : une partie de GeoCoq n'est pas de la géométrie mais contient la vérification

⁵<https://coq.inria.fr/download> et <https://github.com/coq/platform>.

que les axiomes ne sont pas inconsistants, c'est-à-dire qu'il existe un modèle qui satisfait les axiomes de la géométrie. Cette partie, qui n'est pas utile pour nous pour le moment mais qui renforce notre confiance dans la bibliothèque ; utilise des propositions contenues dans les autres bibliothèques. Cette vérification (\mathbb{R}^2 est un modèle pour certains axiomes) est souvent également effectuée aussi pour les autres assistants de preuve : **Isabelle/Hol**[12], **Hol/Light**<https://github.com/jrh13/hol-light/blob/master/100/independence.ml>, **Mizar**[6],...

Nous y reviendrons dans un prochain numéro.

Il est possible de compiler Coq pour ne pas vérifier cette partie. Nous avons fait le choix de tout vérifier. Si vous avez des difficultés à installer **platform** et **Coq**, vous pouvez prendre contact avec nous ou avec les développeurss de **platform** (<https://github.com/coq/platform>).

Pour ma part, voici mes options pour l'installation de **platform**, mais vous êtes libres de choisir les vôtres :

```
(1): Coq 8.14.0 (released Oct 2021) with the first package pick
                                     from Nov 2021
===== PARALLEL BUILD =====
Build opam packages parallel (p) or sequential (s)?
                                     (p/s/c=cancel) p

Number of parallel make jobs (number in 1..16, c=cancel) 10

<pre>===== COMPCERT =====
Install non open source SW CompCert (y) or (n)?
                                     (y/n/c=cancel)</pre> n
```

Revenons à **GeoCoq**. Pour montrer, comment “visuellement”, le théorème de Varignon est vérifié nous avons besoin d'installer et de “compiler” cette bibliothèque. Cette compilation va prendre un certain temps. Vous pouvez remplacer **make** par **make -j** pour une compilation en parallèle.

```
$ clone https://github.com/GeoCoq/GeoCoq.git
$ cd GeoCoq
$ ./configure.sh
$ make
$ coqide
```

Une fois que **coqide** est lancé, vous pouvez ouvrir le fichier suivant :

```
./GeoCoq/Highschool/varignon.v
```

Dans le cas particulier de cette démonstration, nous décomposons étape par étape le processus de vérification. Ces étapes peuvent varier selon les démonstrations.

1. L'étape *zéro* est la donnée du contexte dans lequel la proposition sera valable (Figure. 1).
2. La première étape est la vérification syntaxique de l'énoncé : celui-ci doit être correctement formulé (Figure. 2).
3. Généralement la seconde étape est la séparation entre les hypothèses et la thèse (Figure. 3). Pour faire simple, les hypothèses sont à gauche de la dernière flèche \rightarrow et la thèse à droite.
4. A la troisième étape, le formalisateur a choisi de poser la question suivante au système : *quels sont les points différents ?* Cette étape n'est pas nécessaire et elle peut parfois apparaître à plusieurs endroits de la démonstration. Ici **assert_diffs** est une tactique (donc automatique) qui indique des points différents. Il est à noter que la tactique a été codée précédemment par les formalisateurs. Elle peut être augmentée au fur et à mesure que la formalisation se poursuit et que de nouvelles propositions permettent de déduire des points différents. En général, l'encodage d'une tactique n'est pas banale⁶ mais elle produit des résultats automatiques intéressants. C'est une force du logiciel **Coq** (Figure. 4)
5. La démonstration débute vraiment à l'étape suivante. Le formalisateur choisit un énoncé (sous-but) à démontrer qui sera utilisé ultérieurement dans la démonstration. Tout énoncé doit avoir une preuve. Ici l'énoncé est, traduit en mathématiques, $IL \parallel BD$ (Figure 5). La preuve tient en une ligne : **perm_apply (triangle_mid_par B D A L I)**.

⁶Certaines tactiques dans **GeoCoq** sont non triviales. Elles permettent des justifications très élaborées, en particulier

A ce stade, il n'est pas trop important de comprendre comment le formalisateur a trouvé cette justification. Cela fait partie de son expérience. Ce qui nous intéresse particulièrement est la signification de `triangle_mid_par`. Il y a plusieurs méthodes pour retrouver cet énoncé. Utilisons l'index en ligne : <https://geocoq.github.io/GeoCoq/html/> pour retrouver cet énoncé. Le lien nous redirige vers un autre fichier : https://geocoq.github.io/GeoCoq/html/GeoCoq.Tarski_dev.Annexes.midpoint_theorems.html#triangle_mid_par.

Dans le code ci-dessous, nous avons remplacé \forall par `forall`.

```
Lemma triangle_mid_par : forall A B C P Q,
```

```
  A <> B →
```

```
  Midpoint P B C →
```

```
  Midpoint Q A C →
```

```
  Par A B Q P.
```

```
Proof.
```

```
intros.
```

```
elim (Col_dec A B C); intro.
```

```
  apply triangle_mid_par_flat with C; finish.
```

```
  apply par_strict_par; apply triangle_mid_par_strict with C; assumption.
```

```
Qed.
```

6. Le formalisateur poursuit de proche en proche (Figure 6).
7. Enfin, tout a été démontré (Figure 7).
8. Il reste à clôturer la démonstration : (Figure 8).

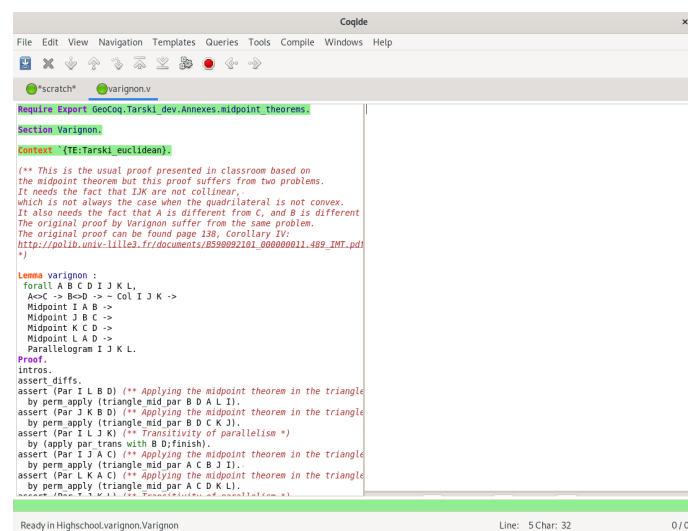


FIGURE 1 – Le contexte

la tactique **Cop**. Mais nous n'aborderons pas ce sujet maintenant.

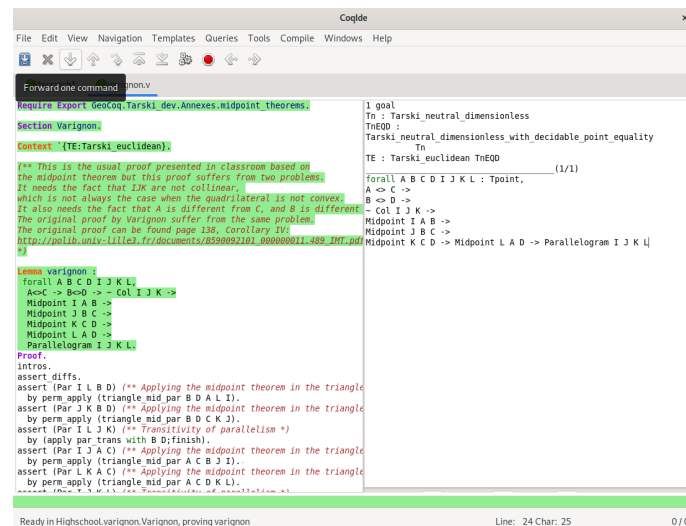


FIGURE 2 – L'énoncé

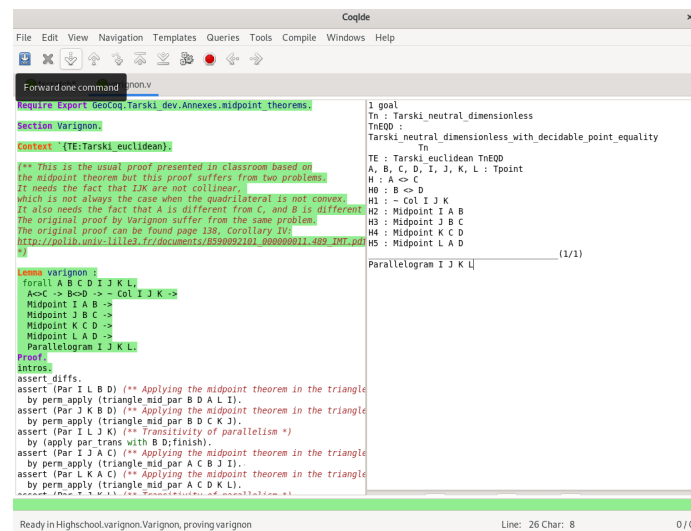


FIGURE 3 – Les hypothèses

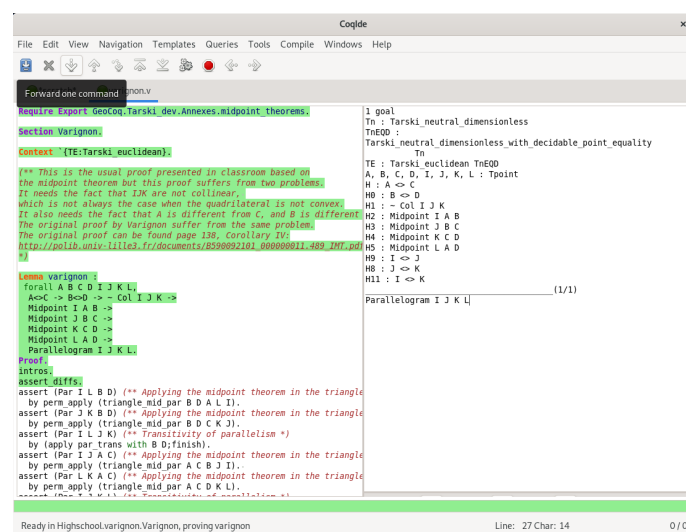


FIGURE 4 – La tactique pour afficher les points différents

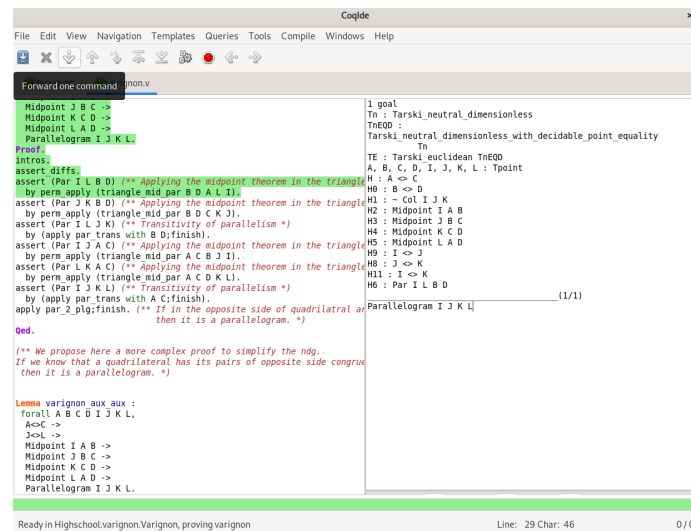


FIGURE 5 – Première assertion prouvée

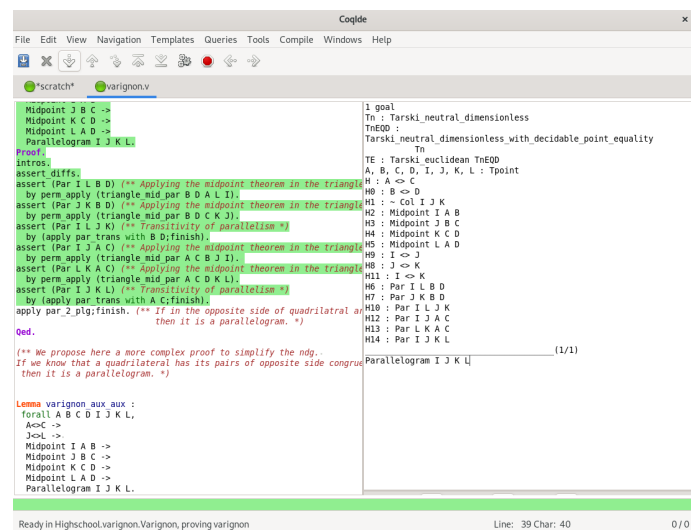


FIGURE 6 – Il reste encore un énoncé à démontrer

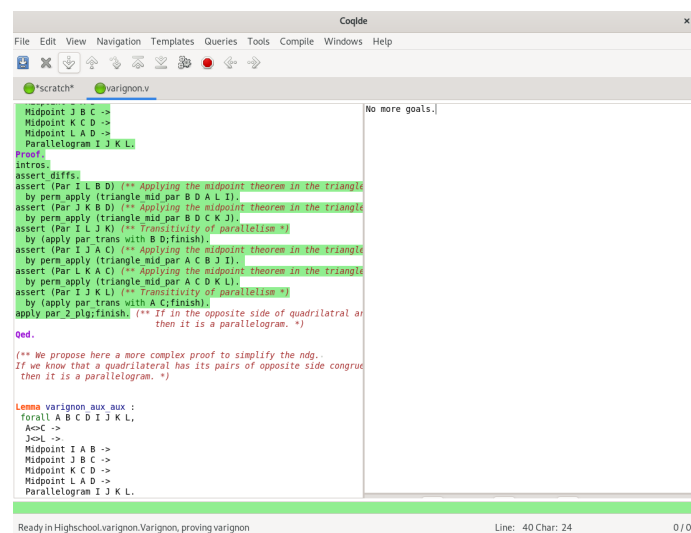
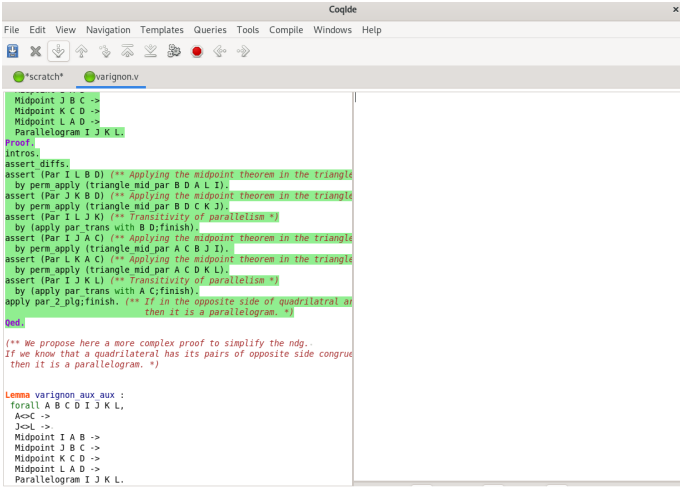


FIGURE 7 – La démonstration est terminée : tout a été démontré !



```

CoqIDE
File Edit View Navigation Templates Queries Tools Compile Windows Help

*scratch* varignon.v

Midpoint J B C ->
Midpoint K C D ->
Midpoint L A D ->
Parallelogram I J K L.
Proof.
  intros.
  assert diff1.
  assert (Par I L B D) (** Applying the midpoint theorem in the triangle
    by perm apply (triangle mid par B D A L I)).
  assert (Par J K B D) (** Applying the midpoint theorem in the triangle
    by perm apply (triangle mid par B D C K J)).
  assert (Par I L J K) (** Transitivity of parallelism *)
  by (apply par trans with B D; finish).
  assert (Par I J A C) (** Applying the midpoint theorem in the triangle
    by perm apply (triangle mid par A C B J I)).
  assert (Par L K A C) (** Applying the midpoint theorem in the triangle
    by perm apply (triangle mid par A C D K L)).
  assert (Par I J K L) (** Transitivity of parallelism *)
  by (apply par trans with A C; finish).
  apply par_2_pig; finish. (** If in the opposite side of quadrilateral A
    then it is a parallelogram. *)
Qed.

(** We propose here a more complex proof to simplify the ndg.
  If we know that a quadrilateral has its pairs of opposite side congrue
  then it is a parallelogram. *)

Lemma varignon aux aux :
forall A B C D I J K L,
A<C ->
J<L ->
Midpoint I A B ->
Midpoint J B C ->
Midpoint K C D ->
Midpoint L A D ->
Parallelogram I J K L.

```

Ready in Highschool.varignon.Varignon Line: 42 Char: 5 0/0

FIGURE 8 – Cette ligne termine le processus

L'exemple est assez simple et la démonstration est courte et lisible. Toutes les démonstrations ne sont pas de cette forme.

De plus, les notions sont ici évidentes, ou en tout cas paraissent évidentes. Pourtant ce n'est pas toujours le cas. Prenons le cas de **Midpoint** $I A B$, apparaissant dans le théorème de Varignon. Quel est le milieu et quels sont les extrémités ? Est-ce le point A qui est au milieu du segment IB ? Ou bien est-ce le point B qui serait le milieu du segment IA ? Ou finalement le point I serait le milieu du segment AB . Les notations utilisées par le formalisateur nous font penser que c'est I qui serait le milieu du segment AB . Comment en être sûr ? Le meilleur moyen est de retourner à la définition : https://geocoq.github.io/GeoCoq/html/GeoCoq.Tarski_dev.Definitions.html#Midpoint

La définition est :

Definition Midpoint $M A B := \text{Bet } A M B \text{ 'and' Cong } A M M B$

Mais parfois nous pouvons ne pas retourner à la définition car nous pensons "savoir".

L'erreur est humaine...

C'est le sujet de la section "*Il faut qu'on en parle...*".

1.2 Mizar Mathematical Library (MML) : Topologie

La Mizar Mathematical Library, MML en abrégé, est une bibliothèque distribuée sous la licence GPL. Elle est accessible sur internet, par exemple à l'adresse suivante : <http://www.mizar.org/version/current/html/>, sous un format *html*⁷.

La topologie générale est bien représentée dans cette bibliothèque : il a été dénombré une centaine d'articles en lien avec cette matière (cf. Table 9 in [3]). L'ouvrage de référence pour certains de ces articles est le livre *General Topology*[8] de Ryszard Engelking⁸.

Dans cette section, afin d'illustrer le potentiel d'expressivité de cette bibliothèque, nous avons choisi d'extraire de la MML les 4 définitions suivantes :

- la droite de Sorgenfrey[2, 1]⁹. Dans la MML, la définition est la suivante :

```
definition
:: WP: Sorgenfrey line
func Sorgenfrey-line -> non empty strict TopSpace means
:Def2: :: TOPGEN_3:def 2
( the carrier of it = REAL & ex B being Subset-Family of REAL st
( the topology of it = UniCl B & B = { [.x,q.[
      where x, q is Real : ( x < q & q is rational ) } ) );
uniqueness ;
existence
proof end;
end;
```

- le plan de Sorgenfrey[20]¹⁰. Dans la MML, la définition est la suivante :

```
definition
func Sorgenfrey-plane -> non empty strict TopSpace equals
:: TOPGEN_6:def 1
[:Sorgenfrey-line,Sorgenfrey-line:];
correctness ;
end;
```

⁷Pour être tout-à-fait complet, au contraire de la MML et de la plupart des assistants de preuve, le logiciel (système) Mizar n'est pas *open source*. Plus précisément on a (voir : <http://www.mizar.org/system/>) :

The Mizar Mathematical Library is distributed under the the GPL and/or the CC-BY-SA license. The distribution of the Mizar system is freely available for download for any non commercial purposes.

NOTE : Almost all material contained in the Mizar distribution is copyrighted by the Association of Mizar Users (SUM). The source code of the Mizar verifier and accompanying tools is available to the members of SUM.

Nous utilisons le système **Mizar** dans un cadre non-commercial.

⁸https://fr.wikipedia.org/wiki/Ryszard_Engelking

⁹Wikipedia : (https://fr.wikipedia.org/wiki/Droite_de_Sorgenfrey) : En mathématiques, la droite de Sorgenfrey - souvent notée S - est la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie (plus fine que la topologie usuelle) dont une base est constituée des intervalles semi-ouverts de la forme $[a, b[$ (pour a et b réels tels que $a < b$).

¹⁰Wikipedia : (https://fr.wikipedia.org/wiki/Plan_de_Sorgenfrey) : Le plan de Sorgenfrey $S \times S$ est l'ensemble produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muni de la topologie dont une base d'ouverts est constituée des rectangles de la forme $[a, b[\times [c, d[$, c'est-à-dire que les ouverts de $S \times S$ sont les réunions de tels rectangles.

- le plan de Moore-Niemytski[1]¹¹ Dans la MML, la définition est la suivante :

```

definition
:: WP: Niemytzki plane
func Niemytzki-plane -> non empty strict TopSpace means
:Def3: :: TOPGEN_5:def 3
( the carrier of it = y>=0-plane & ex B being
  Neighborhood_System of it st ( ( for x being Real
    holds B . |[x,0]| = { ((Ball (|[x,r]|,r)) \ {|[x,0]|})
    where r is Real : r > 0 } ) & ( for x, y being Real
    st y > 0 holds B . |[x,y]| = { ((Ball (|[x,y]|,r)) /\
    y>=0-plane) where r is Real : r > 0 } ) ) );
existence
proof end;
uniqueness
proof end;
end;

```

- la tribu borélienne sur un espace topologique (*On the Borel Families of Subsets of Topological Spaces*)[9] Dans la MML, la définition est la suivante¹²

```

definition
let T be non empty TopSpace;
func BorelSets T -> compl-closed all-open-containing
  closed_for_countable_unions Subset-Family of T means
:Def11: :: TOPGEN_4:def 11
for G being compl-closed all-open-containing
  closed_for_countable_unions Subset-Family of T holds
  it c= G;
existence
proof end;
uniqueness ;
end;

```

2 Il faut qu'on en parle...



Les assistants de preuve, qu'ils soient interactifs ou automatiques, sont des outils. Nous vous préconisons leur emploi en “personne prudente et raisonnable” avec un regard critique : c'est le but de cette section. Comme nous ne pouvons être exhaustif, soyez libre également d'y apporter vos avis et vos opinions.



Nous refusons de publier des opinions, avis ou positions contraire à la loi, par exemple propos haineux et racistes, injures, calomnies, propos diffamatoires, ...
De plus, chaque assistant de preuve a ses avantages et ses inconvénients et ils s'inscrivent dans des contextes de développement, de logique, ou d'histoires, ...souvent différents. La revue n'est pas et ne doit pas être un lieu de dénigrement d'un assistant de preuve ou d'une logique en particulier.

¹¹Wikipedia : (https://fr.wikipedia.org/wiki/Plan_de_Moore) : En mathématiques, le plan de Moore ou plan de Niemytzki — nommé d'après Robert Lee Moore et Viktor Niemytzki (ru) — est un espace topologique utilisé comme contre-exemple. Il s'agit en fait d'un demi-plan, muni d'une topologie strictement plus fine que la topologie usuelle.

Sur le demi-plan supérieur $\Gamma = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q \geq 0\}$, on définit une topologie par les voisinages, de la manière suivante :

- si $q > 0$, les voisinages de (p, q) dans Γ sont les mêmes que ses voisinages dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (muni de la topologie produit, induite par la topologie usuelle de \mathbb{R}^2) ;
- une base de voisinages d'un point $(p, 0)$ de l'axe des abscisses est constituée des $(p, 0) \cup D$, pour tout disque ouvert D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tangent en $(p, 0)$ à cet axe, i.e. D de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - p)^2 + (y - r)^2 < r^2\}$ pour n'importe quel réel $r > 0$.

¹²

- Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Borel_set) : In mathematics, a Borel set is any set in a topological space that can be formed from open sets (or, equivalently, from closed sets) through the operations of countable

Peut-on faire confiance à un assistant de preuve ?

En général, oui.

Peut-on **toujours** faire confiance à un assistant de preuve ?

Clairement, **non**.

Aïe ! Faut-il tout abandonner et partir en courant ? Ce n'est pas interdit. Mais vous pouvez aussi poursuivre votre lecture.

Comme tout logiciel, la confiance en un assistant de preuve repose sur toute une chaîne qui comprend entre autre la confiance que nous accordons dans le matériel utilisé. En 1994, une erreur de conception présente dans un processeur a eu un retentissement médiatique important (le Bug de la division¹³).

Effectuons le parallèle avec un outil bien connu : une calculatrice. Celle-ci peut-elle produire un résultat étonnant ? Oui. Par exemple la calculatrice d'un système d'exploitation bien connu produit une réponse différente en mode normal et en mode scientifique¹⁴. Mais il semble que ce n'est pas une erreur : le logiciel traite différemment l'ordre des opérations suivant un mode ou l'autre. Pour en savoir plus sur l'ordre des opérations, voir par exemple l'article *Order of Operations : The Myth and the Math*[4]. L'ordre des opérations n'est pas le seul à produire des ambiguïtés, il existe par exemple le *Principe d'articulation*[5] :

(Abstract : The Articulation Principle : Making long-term sense of mathematical expressions by how they are spoken and heard)

The Articulation Principle offers a theory that explains how mathematical expressions can be given clear and unambiguous meaning by the way in which they are spoken and heard. By leaving short pauses in speech, sub-expressions can be interpreted as operations to be carried out in time or as mental objects that can be manipulated at a more sophisticated level. This offers a fundamental foundation for the growth of meaningful mathematical thinking at all levels from young children to the wide array of adult mathematics. It is part of an evolving comprehensive theory of "how humans learn to think mathematically" that addresses the challenges of "math wars" between differing communities of practice with differing beliefs and needs in a complex society. This paper sets the Articulation Principle in a wider long-term learning framework and provides empirical evidence for its use in meaningful interpretation of mathematical expressions.¹⁵

Est-ce que les assistants de preuves vont échapper ou ne seront pas influencés par ces difficultés ? Il y a là sujet à réflexion.

Par exemple, la définition, dans **GeoCoq** de `Perp_at`¹⁶ est

(** Definition 8.11. *)

```
Definition Perp_at X A B C D :=
  A <> B /\ C <> D /\ Col X A B /\ Col X C D /\
  forall U V, Col U A B -> Col V C D -> Per U X V.
```

union, countable intersection, and relative complement. Borel sets are named after Émile Borel.

- Wikipedia (https://fr.wikipedia.org/wiki/Tribu_borélienne) : En mathématiques, la tribu borélienne (également appelée tribu de Borel ou tribu des boréliens) sur un espace topologique X est la plus petite tribu sur X contenant tous les ensembles ouverts. Les éléments de la tribu borélienne sont appelés des boréliens.
- Wikipedia ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Tribu_\(mathématiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tribu_(mathématiques))) : En mathématiques, une tribu ou σ -algèbre (lire sigma-algèbre) ou plus rarement corps de Borel sur un ensemble X est un ensemble non vide de parties de X , stable par passage au complémentaire et par union dénombrable (donc aussi par intersection dénombrable).

¹³https://fr.wikipedia.org/wiki/Bug_de_la_division_du_Pentium

¹⁴<https://answers.microsoft.com/en-us/insider/forum/all/calculator-order-of-operation-mismatch/4c48cab0-a591-4022-bc9f-f30f265a5175>

¹⁵(NdE. Traduction approximative) Le principe d'articulation est une théorie qui explique comment les expressions mathématiques peuvent être dotées d'un sens clair et non ambigu par la façon dont elles sont parlées et entendues. En laissant de courtes pauses dans le discours, les sous-expressions peuvent être interprétées comme des opérations à effectuer dans le temps ou comme des objets mentaux pouvant être manipulés à un niveau plus sophistiqué. Cela constitue une base fondamentale pour le développement d'une pensée mathématique significative à tous les niveaux, des plus jeunes aux plus âgés. Elle fait partie d'une théorie globale et évolutive sur "la manière dont les humains apprennent à penser mathématiquement" qui répond aux défis de la "guerre des maths" entre différentes communautés de pratique ayant des croyances et des besoins différents dans une société complexe. Cet article place le principe d'articulation dans un cadre plus large d'apprentissage à long terme et fournit des preuves empiriques pour son utilisation dans l'interprétation significative des expressions mathématiques.

¹⁶https://github.com/GeoCoq/GeoCoq/blob/master/Tarski_dev/Definitions.v

La définition traduite dans IsaGeoCoq est `PerpAt`¹⁷, est légèrement différente car l’assistant de preuve **Isabelle**¹⁸ n’autorise pas le signe `_` dans le nom d’une définition¹⁹ :

```
definition PerpAt ::
  "[p,'p','p','p','p'] '==>' bool" ("_ PerpAt _ _ _ _" [99,99,99,99,99] 50)
  where "X PerpAt A B C D 'equiv'

  A <> B 'and'
  C <> D 'and'
  Col X A B 'and'
  Col X C D 'and'
  ('forall' U V. ((Col U A B 'and' Col V C D) 'implies' Per U X V))"
```

Ici, le point mis en évidence est le point *X*. Il ne s’agit pas à proprement parler d’une application du principe d’articulation car le principe est actif dans le contexte du “parler et entendre” et au stade actuel de la technologie, les assistants de preuve ne parlent pas et n’entendent pas. L’analogie s’arrête là.

Nous avons vu dans une section précédente que la mise en évidence d’un point dans une définition n’est pas unique (Cf. La définition du milieu d’un segment dans la bibliothèque **GeoCoq** (page 10).

En conclusion : Si vous utilisez une bibliothèque validée par un assistant de preuve, prenez le temps de comprendre et assimiler les définitions.

3 Le centre de documentation



Le centre de documentation n’offre ni service de vente ni de prêt de livres, revues ou magazines mais la consultation sur place au siège social est possible sur rendez-vous, dans le respect des règles sanitaires en cours. Si vous désirez acquérir un livre, nous vous invitons à prendre contact avec votre libraire préféré(e).



Cette rubrique contient les dernières nouvelles, les acquisitions ainsi que des présentations de certains ouvrages en notre possession.

Dans ce numéro, nous présentons deux livres : “La logique pas à pas” de Jacques Duprat et “Éléments de logique” de Grzegorz Malinowski.

3.1 “La logique pas à pas”

Le livre[7] contient les parties suivantes :

- Calcul propositionnel
 - syntaxe ;
 - sémantique
 - théorie de la démonstration ;
- Logique modale
 - syntaxe ;
 - sémantique ;
 - systèmes logiques ;
 - logiques aléthique, déontique, épistémiques, temporelles, etc.
 - un souçon de logique modale quantifiée ;
- Logique du 1er ordre
 - syntaxe ;
 - sémantique ;
 - traduction de la logique modale dans la logique du 1re ordre ;
 - théorie de la démonstration ;

¹⁷https://www.isa-afp.org/browser_info/current/AFP/IsaGeoCoq/Tarski_Neutral.html

¹⁸<https://isabelle.in.tum.de/>

¹⁹NdE. Certains symboles ont été modifiés pour des raisons de lisibilité.

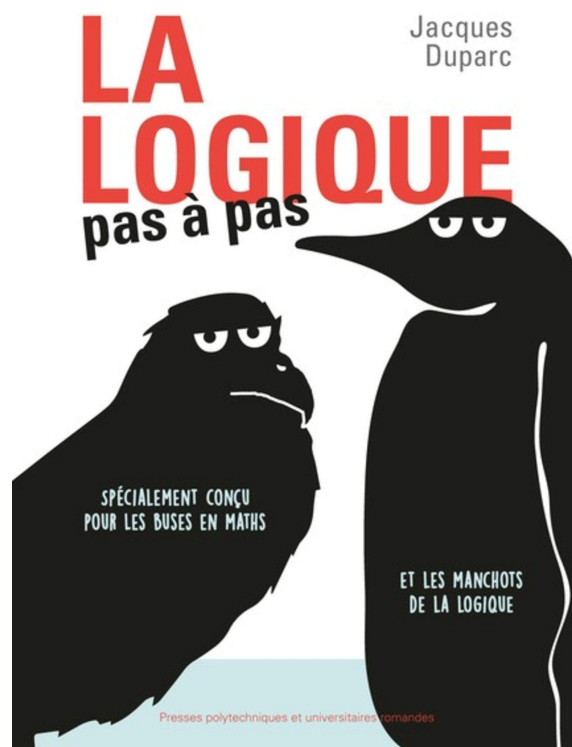


FIGURE 9 – La logique pas à pas

- Récursivité, 2ième ordre et correspondance Preuves-Programmes
 - Différents formats d'infini ;
 - Récursivité :
 - Logique du 2ième ordre et théorie des ensembles ;
 - Correspondance Preuves-Programmes ;

Extrait de l'avant-propos :

Cet ouvrage est avant tout construit dans l'idée de mettre les bases fermes de la logique à la portée des étudiants non mathématiciens. Non seulement aucun bagage mathématique n'est requis pour y entrer de plein pied, mais ce livre a été spécialement élaboré pour les étudiants entretenant une relation agitée avec les sciences et ceux à qui les mathématiques et le formalisme cassent (*a priori*) les pieds.

Pour autant, au lieu de maintenir le lecteur à distance et de ne lui proposer de la logique que quelques aperçus lointains, ce livre se propose de "faire la trace" et de le guider pas à pas afin de l'amener au cœur de la matière. Pour ce faire, aux présentations traditionnelles arides et sévères sont préférées ici des expositions modernes articulées autour de la notion d'arbre et des concept de jeux, privilégiant à la fois l'aspect visuel et le caractère ludique des choses.

Je vous partage mes points forts/faibles :

- Points fort : la première partie fait la part belle aux exemples et j'ai découvert les jeux sémantiques avec le Vérificateur et le Falsificateur. Cela donne envie d'aller plus loin, par exemple le texte de Manuel Rebuschi : "Des mots et des jeux" *Sciences du jeu*²⁰[17]. Une bonne vision sur les autres logiques.
- Points faibles : la deuxième partie est moins ludique et semble plus traditionnelle. J'aurai bien voulu une partie sur les types et des exemples illustrés avec des logiciels actuels.

²⁰En ligne] <http://journals.openedition.org/sdj/1557>

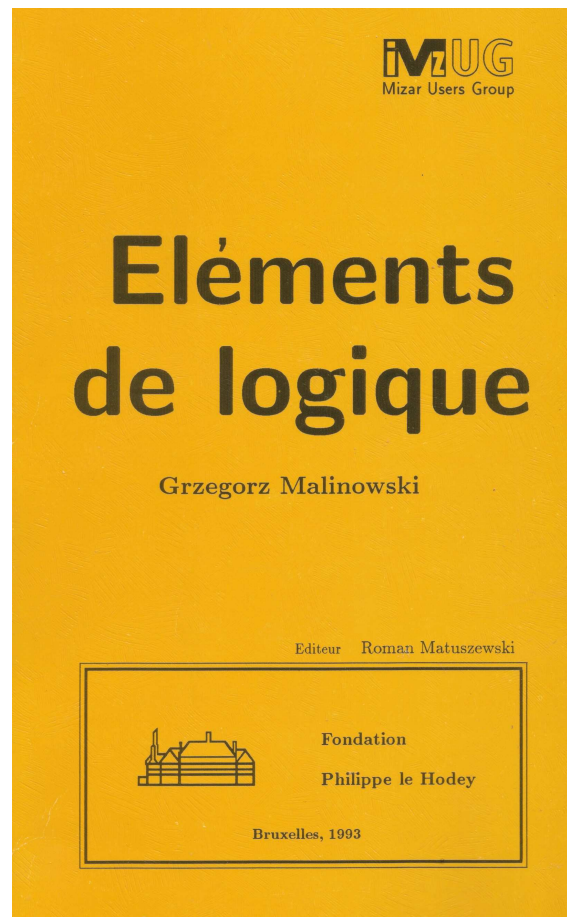


FIGURE 10 – Élément de logique

3.2 “Éléments de logique”

“Éléments de logique”[13] est un livre traduit de la version anglaise *Element of Logic* (1990). Le livre contient les parties suivantes :

- Introduction.
- Enoncés au sens logique. Formalisation logique des expressions de tous les jours.
- Forme traditionnelle du Calcul Propositionnel Classique.
- Conséquence logique et inconsistance.
- Les principes de la déduction naturelle.
- Déduction propositionnelle “avancée”.
- Complétude du système SB. Ses conséquences.
- Calcul des prédicats. Déduction naturelle avec quantificateurs.
- Méthodes sémantiques du calcul des prédicats.
- Modifications et extensions du calcul des prédicats. Autres applications.

Extrait de l’introduction :

Le but du présent cours assisté par ordinateur est d’initier le lecteur au calcul logique des propositions, déterminé à partir du modèle de la bivalence. Deux formalisations fondamentales seront traitées : l’une sémantique (fondée sur l’interprétation), l’autre syntaxique (fondée sur la déduction). Le principal système de déduction naturelle dont traite ce manuel est dû à Shupecki et Borkowski (cf., par exemple, *Elements of Mathematical Logic and Set Theory*[18, 19], Pergamon Press, Oxford, PWN, Warszawa, 1967). Le choix de cette formalisation se justifie non seulement par sa nature même, mais aussi par le fait que le programme informatique Mizar-MSE utilisé tout au long de ce cours est entièrement bâti à partir d’elle. L’auteur des langages Mizar-MSE est Andrzej Trybulec (Université de Varsovie). Le système Mizar-MSE a été mis en œuvre, pour la première fois, par Roman Matuszewski, Andrzej Trybulec et Piotr Rudnicki. (*Introduction, page 1*)

Si le livre n'est pas récent, il a le mérite, à notre connaissance, de présenter pour la première fois en français, cours de logique et exercices vérifiés par un assistant de preuve, le système Mizar-MSE, un ancêtre du système Mizar actuel [14]. Il est à noter que la syntaxe et la grammaire Mizar-MSE même si elle n'est plus compatible avec Mizar actuel, présentent des similitudes.

A titre d'exemple, on présente ci-dessous un exercice tiré du livre avec la présentation sous la forme d'un tableau en suivant la méthode de Fitch²¹ ainsi que sa version utilisant Mizar-MSE.

Les règles détaillées ici (Table 1) caractérisent les connecteurs usuels de la logique classique telles que présentées dans le livre.

Par exemple, on peut trouver, à la page 37 du livre, l'exemple *IV.3.1* : des preuves directes de

$$T1 : (p \implies (q \implies r)) \implies (p \wedge q \implies r) \text{ (Table2)}$$

et

$$T2 : (p \wedge q \implies r) \implies (p \implies (q \implies r)) \text{ (Table3)}$$

peuvent être élaborées comme suit :

La séquence de la Table 4

est une preuve directe ordinaire de la formule qui figure dans la ligne 3. On a par conséquent

$$\vdash (p \implies (q \implies r)) \equiv (p \wedge q \implies r)$$

Le code Mizar-MSE correspondant à l'exercice est le suivant (tiré du livre, page 38) :

```
environ
begin
  IV_3_1_T1:
    (p[] implies (q[] implies r[])) implies (p[] & q[] implies r[])
  proof
    assume that 1: (p[] implies (q[] implies r[]))
      and 2: p[] & q[];
    3:  p[] by 2;
    4!  q[] by 2;
    5:  q[] implies r[] by 1,3;
    thus r[] by 4,5;
  end;

environ
begin
  IV_3_3:
    (not p[] implies not q[]) implies (q[] implies p[])
  proof
    assume that 1: not p[] implies not q[]
      and 2: q[]
      and 3: not p[];
    4:  not q[] by 1,3;
    thus contradiction by 2,4;
  end;
```



Prenez vos précautions! La procédure fournie ci-dessous est expérimentale. Nous ne sommes pas responsables si des dommages sont commis en application de celle-ci.



Nous ne pouvons pas garantir que le code suivant fonctionnera sur votre configuration matérielle/logicielle. Si malgré tous vos efforts, nos conseils d'installation ne vous donne pas le résultat attendu, nous mettons à votre disposition dans nos locaux et sur rendez-vous un ordinateur avec la procédure mise en œuvre ci-dessous.

²¹https://fr.wikipedia.org/wiki/Style_de_Fitch_pour_la_d%C3%A9duction_naturelle

TABLE 1 – Règles d'inférences primaires pour le système SB (Śłupecki et Borkowski)

$$(RD) \frac{\phi \implies \psi}{\phi \over \psi} \quad (\text{RÈGLE DE DÉTACHEMENT})$$

$$(\vee I_1) \frac{\phi}{\phi \vee \psi} \quad (\text{INTRODUCTION DE LA DISJONCTION 1})$$

$$(\vee I_2) \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \quad (\text{INTRODUCTION DE LA DISJONCTION 2})$$

$$(\vee E) \frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi} \quad (\text{ELIMINATION DE LA DISJONCTION})$$

$$(\wedge E_1) \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \quad (\text{ELIMINATION DE LA CONJONCTION 1})$$

$$(\wedge E_2) \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \quad (\text{ELIMINATION DE LA CONJONCTION 2})$$

$$(\wedge I) \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \quad (\text{INTRODUCTION DE LA CONJONCTION})$$

$$(\equiv E_1) \frac{\phi \equiv \psi}{\phi \implies \psi} \quad (\text{ELIMINATION DE L'EQUIVALENCE 1})$$

$$(\equiv E_2) \frac{\phi \equiv \psi}{\psi \implies \phi} \quad (\text{ELIMINATION DE L'EQUIVALENCE 2})$$

$$(\equiv I) \frac{\phi \implies \psi \quad \psi \implies \phi}{\psi \equiv \phi} \quad (\text{INTRODUCTION DE L'EQUIVALENCE})$$

TABLE 2 – Preuve de T1

1.	$p \implies (q \implies r)$	sup
2.	$p \wedge q$	sup
3.	p	$\wedge E_1$ 1 2
4.	q	$\wedge E_2$ 1 2
5.	$q \implies r$	RD 1 1,3
6.	r	RD1 4,5

TABLE 3 – Preuve de T2

1.	$p \wedge r$	sup
2.	p	sup
3.	q	sup
4.	$p \wedge q$	$\wedge I$ 1 2,3
5.	r	RD1 1,4

Recommandations pour les tests sous Debian :

1. Récupérer les fichiers “Mizar-MSE” dans le lien “Mizar-MSE-ARCHIVE” en bas de la page <https://fm.mizar.org/mizar-archive/> et les copier dans un répertoire (ex : REPMSE) sur votre disque dur.
2. Le fichier à vérifier doit être converti avec “unix2dos” et copier dans le répertoire REPMSE.
3. l’exécutable fichier “pc-mse.exe” peut-être lancé avec “dosbox”, avec la procédure suivante :
 - (a) Tapez ceci dans un terminal, pour créer le fichier de configuration :


```
# dosbox -c 'config -writeconf dosbox.conf'
```
 - (b) Quittez DOSBox en tapant :


```
exit
```
 - (c) Ajouter à la fin du fichier “dosbox.conf” les lignes suivantes :


```
mount c /home/[...]/REPMSE/
c:
keyb fr
```
4. Lancer dosbox
5. Puis lancer pc-mse

Le programme fonctionne comme les anciens programmes à base de turbovision²². La syntaxe du langage peut-être trouvée ici : <http://www.yac.com.pl/mt.mizar.mse.en.html>.

Avant de passer au logiciel suivant, je partage avec vous :

- Points forts : programme original historique qui peut toujours fonctionner sous Linux. Solide et respecte la déduction naturelle. La syntaxe est presque la même que celle qui sera utilisée plus tard pour Mizar et toutes les autres déclinaisons de langage déclaratif (par ex. Isar pour Isabelle/Hol[22, 16, 21]). Un des concepteurs, Roman Matuszeski, signale que l’utilisation de ce logiciel est en Freeware²³.
- Points faibles : quelques difficultés avec le clavier. Même si le logiciel est un Freeware - à ma connaissance - il n’est plus modifiable. On aurait eu envie d’avoir une version qui autoriserait, avec la même syntaxe, une logique constructiviste, par exemple.

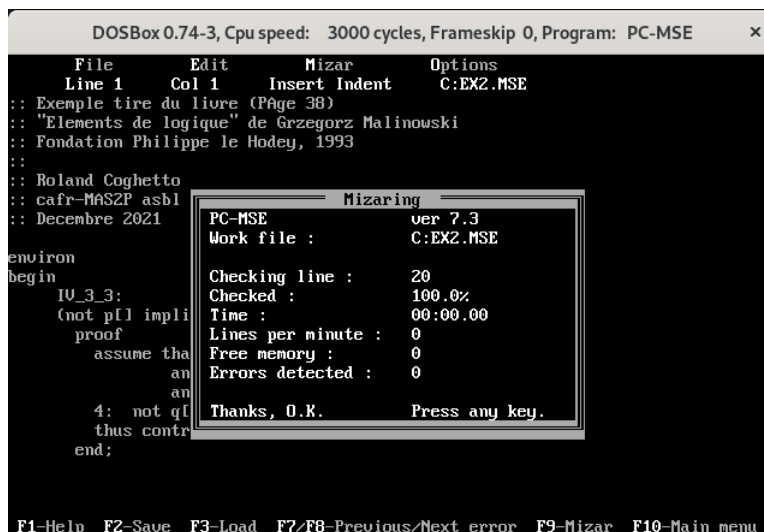
Une autre version, mais plus récente, de Mizar MSE, a été développée par Michal Trybulec : **Eddie**. Il est téléchargeable à l’adresse suivante : <http://www.yac.com.pl/mt.mizar.eddie.en.html>. Il se présente en anglais, dans des fenêtres plus classiques.

²²https://fr.wikipedia.org/wiki/Turbo_Vision

²³Communication avec l’auteur le 13 décembre 2021.

TABLE 4 – Exemple IV.3.2 du livre

1. $(p \implies (q \implies r)) \implies (p \wedge q \implies r)$ T1 th
2. $(p \wedge q \implies r) \implies (p \implies (q \implies r))$ T2 th
3. $(p \implies (q \implies r)) \equiv (p \wedge q \implies r) \equiv I1\ 1,2$



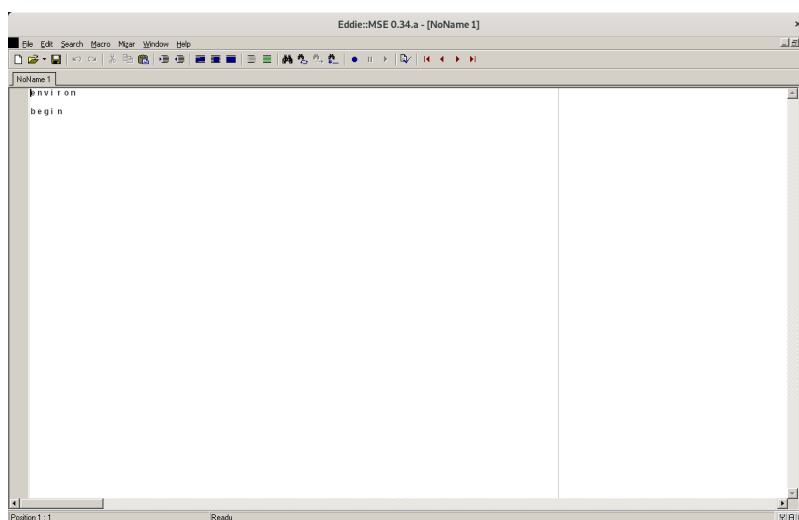
Au niveau de la licence, l'auteur signale sur son site^a :

Article copyrights remain with their authors. License for the program : freeware. Use it, copy it, distribute it, promote it, etc. as much as you like.

^a<http://www.yac.com.pl/download.ymk.en.html>

Avec Debian, il fonctionne grâce à `wine` (et y ajoutant le package `wine32`).

La syntaxe²⁴ est très légèrement différent que pour Mizar-MSE. Un aperçu avec le même exemple que ci-dessus :



Pour être complet :

1. Identification pérenne de la notice : <https://www.sudoc.fr/095356878>
2. “Élément de logique” est un livre de 93 pages de Grzegorz Malinowski, édité par la Fondation “Philippe le Hodey”, Bruxelles, 1993.

²⁴<http://www.yac.com.pl/mt.mizar.mse.en.html>

```

Eddie-MSE 0.34.a - [NoName 1 (modified)]
File Edit Search Macro Mgr Window Help
...
Exemple titre du livre (Page 38)
...
"Elements de logique" de Grzegorz Malinowski
...
Fondation Philippe le Hodey, 1993
...
Roland Coghetto
...
cstr-MAS2P esdi
...
Decembre 2021

environ
begin
  V_3_3:
  (not p) implies not q[] implies (q[] implies p[])
  proof
    assume that 1: not p[] implies not q[]
    and 2: q[]
    and 3: not p[];
    4: not q[] by 1, 3;
    thus contradiction by 2, 4;
  end;

```

Position 21:1 Ready

```

Eddie-MSE 0.34.a - [NoName 1 (modified)]
File Edit Search Macro Mgr Window Help
...
Exemple titre du livre (Page 38)
...
"Elements de logique" de Grzegorz Malinowski
...
Fondation Philippe le Hodey, 1993
...
Roland Coghetto
...
cstr-MAS2P esdi
...
Decembre 2021

environ
begin
  V_3_3:
  (not p) implies not q[] implies (q[] implies p[])
  >> A Error: [312] Unknown predicate [use the "pred" instruction].
  >> A Error: [312] Unknown predicate [use the "pred" instruction].
  proof
    assume that 1: not p[] implies not q[]
    and 2: q[]
    and 3: not p[];
    4: not q[] by 1, 3;
    thus contradiction by 2, 4;
  end;

```

Position 17:25 Ready

```

Eddie-MSE 0.34.a - [NoName 1 (modified)]
File Edit Search Macro Mgr Window Help
...
Exemple titre du livre (Page 38)
...
"Elements de logique" de Grzegorz Malinowski
...
Fondation Philippe le Hodey, 1993
...
Roland Coghetto
...
cstr-MAS2P esdi
...
Decembre 2021

environ
pred p[];
pred q[];
begin
  V_3_3:
  (not p) implies not q[] implies (q[] implies p[])
  proof
    assume that 1: not p[] implies not q[]
    and 2: q[]
    and 3: not p[];
    4: not q[] by 1, 2;
    thus contradiction by 2, 4;
  end;

```

Position 11:12 Ready

3. Pour en savoir plus sur l'auteur : Grzegorz Malinowski "Professor Grzegorz Malinowski in Honorem"[11]

4. Pour un rappel historique et une recontextualisation : l'article *Mizar : the first 30 years*[14]. La section 8 "1982 : Mizar-MSE"aborde plus particulièrement le logiciel présenté ici.

Pour aller vraiment plus loin, le lien du musée "Mizar-MSE" :

<http://www.mizar.org/project/bibliography.html> (section "Works devoted to Mizar-MSE")

Références

- [1] Grzegorz BANCEREK. « Niemytzki Plane - an Example of Tychonoff Space Which Is Not T_4 ». In : *Formalized Mathematics* 13.4 (2005), p. 515-524. URL : http://fm.mizar.org/2005-13/pdf13-4/topgen_5.pdf.
- [2] Grzegorz BANCEREK. « On Constructing Topological Spaces and Sorgenfrey Line ». In : *Formalized Mathematics* 13.1 (2005), p. 171-179. URL : http://fm.mizar.org/2005-13/pdf13-1/topgen_3.pdf.
- [3] Grzegorz BANCEREK et al. « The Role of the Mizar Mathematical Library for Interactive Proof Development in Mizar ». In : *J. Autom. Reason.* 61.1-4 (2018), p. 9-32. DOI : 10.1007/s10817-017-9440-6. URL : <https://doi.org/10.1007/s10817-017-9440-6>.
- [4] Jennifer M. BAY-WILLIAMS et Sherri L. MARTINIE. « Order of Operations : The Myth and the Math ». In : *Teaching Children Mathematics* 22.1 (2015), p. 20-27. ISSN : 10735836. URL : <http://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.22.1.0020>.
- [5] Kin Eng CHIN, Fui Fong JIEW et David TALL. « The Articulation Principle for making long-term sense of mathematical expressions by how they are spoken and heard : Two case studies ». In : *The Mathematics Enthusiast* 19.2 (2022), p. 657-676.
- [6] Roland COGHETTO et Adam GRABOWSKI. « Tarski Geometry Axioms – Part II ». In : *Formalized Mathematics* 24.2 (2016), p. 157-166. DOI : doi:10.1515/forma-2016-0012. URL : <https://doi.org/10.1515/forma-2016-0012>.
- [7] Jacques DUPARC. *La logique pas à pas*. Presses polytechniques et universitaires romanes, 2015.
- [8] Ryszard ENGELKING. « General Topology, PWN-Polish Sci ». In : *Publ., Warszawa* (1977).
- [9] Adam GRABOWSKI. « On the Borel Families of Subsets of Topological Spaces ». In : *Formalized Mathematics* 13.4 (2005), p. 453-461. URL : http://fm.mizar.org/2005-13/pdf13-4/topgen_4.pdf.
- [10] Frédérique GUILHOT. *Premiers pas vers un cours de géométrie en Coq pour le lycée*. Rapp. tech. RR-4893. INRIA, juill. 2003. URL : <https://hal.inria.fr/inria-00071689>.
- [11] Andrzej INDRZEJCZAK et Janusz CIUCIURA. « Professor Grzegorz Malinowski in Honorem ». In : *Bulletin of the Section of Logic* 46.1/2 (juin 2017), p. 1-10. DOI : 10.18778/0138-0680.46.1.2.01. URL : <https://czasopisma.uni.lodz.pl/bulletin/article/view/2925>.
- [12] T. J. M. MAKARIOS. « The independence of Tarski's Euclidean axiom ». In : *Archive of Formal Proofs* (oct. 2012). https://isa-afp.org/entries/Tarskis_Geometry.html, Formal proof development. ISSN : 2150-914x.
- [13] Grzegorz MALINOWSKI. *Eléments de logique*. Fondation Philippe le Hodey, 1993.
- [14] Roman MATUSZEWSKI et Piotr RUDNICKI. « Mizar : the first 30 years ». In : *Mechanized mathematics and its applications* 4.1 (2005), p. 3-24.
- [15] Julien NARBOUX. « Mechanical Theorem Proving in Tarski's Geometry ». In : *Automated Deduction in Geometry*. 2006.
- [16] Tobias NIPKOW. « Structured proofs in Isar/HOL ». In : *International Workshop on Types for Proofs and Programs*. Springer. 2002, p. 259-278.
- [17] Manuel REBUSCHI. « Des mots et des jeux ». In : *Sciences du jeu* 11 (2019).
- [18] Jerzy SŁUPECKI et Ludwik BORKOWSKI. *Elements of Mathematical Logic and Set Theory*. Rapp. tech. 1967.
- [19] Jerzy SŁUPECKI et Ludwik BORKOWSKI. « Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości ». In : *Les Etudes Philosophiques* 18.4 (1963).
- [20] Adam ST. ARNAUD et Piotr RUDNICKI. « Some Properties of the Sorgenfrey Line and the Sorgenfrey Plane ». Version 8.1.01 5.13.1174. In : *Formalized Mathematics* 21.2 (2013), p. 83-85. ISSN : 1426-2630. DOI : 10.2478/forma-2013-0009.
- [21] Markus WENZEL. « Isar—a generic interpretative approach to readable formal proof documents ». In : *International Conference on Theorem Proving in Higher Order Logics*. Springer. 1999, p. 167-183.
- [22] Markus WENZEL et Freek WIEDIJK. « A comparison of Mizar and Isar ». In : *Journal of Automated Reasoning* 29.3 (2002), p. 389-411.